ZÉNON

Approximation dans L'interpolation

APPROXIMATION

DANS

L'INTERPOLATION

PAR

ZÉNON

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1922

ERRATUM.

Page 6. Formule (26), lire f au lieu de f_n.

ZÉNON — *Approximation dans l'interpolation.*

APPROXIMATION

DANS

L'INTERPOLATION

Soit $f(x)$ une fonction qui varie constamment dans le même sens quand x croît de 1 à N; supposons-la croissante et posons $f(n) = v_n$.

Soient $V_1, V_2, V_3, \ldots$ des multiples de 10^{-k} (k étant un entier positif) respectivement approchés de $v_1, v_2, v_3, \ldots$ à $\frac{1}{2}\,10^{-k}$ près. Posons, pour abréger,

$$u = 10^{-k}, \qquad \delta = \frac{1}{2}u, \qquad d_n = v_{n+1} - v_n, \qquad D_n = V_{n+1} - V_n.$$

Par hypothèse,

$$|V_n - v_n| \leqq \delta; \tag{1}$$

par conséquent,

$$|D_n - d_n| \leqq 2\delta = u. \tag{2}$$

Donc $D_n \geqq d_n - u > -u$, car $d_n > 0$; mais D_n est un multiple de u, donc $D_n \geqq 0$ ou $V_{n+1} \geqq V_n$; la suite $V_1, V_2, V_3, \ldots$ est *non décroissante :* si $V_n > V_{n'}$, il s'ensuit que $n > n'$.

Considérons les fonctions $f_n(x)$ et $F_n(x)$ définies par

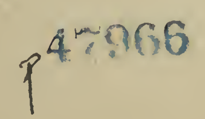
$$\begin{aligned} f_n(x) &= v_n + (x-n)\,d_n = v_n + (x-n)(v_{n+1} - v_n), \\ F_n(x) &= V_n + (x-n)\,D_n = V_n + (x-n)(V_{n+1} - V_n). \end{aligned} \tag{3}$$

Ces fonctions sont *croissantes* (sauf que $F_n(x)$ est constante quand $D_n = 0$). De plus,

$$f_n(n) = v_n, \qquad F_n(n) = V_n, \qquad f_n(n+1) = v_{n+1}, \qquad F_n(n+1) = V_{n+1};$$

$$f_n(x) - f_n(x') = (x - x')\,d_n, \tag{4}$$

$$F_n(x) - F_n(x') = (x - x')\,D_n. \tag{5}$$



En désignant $f_n(x) - F_n(x)$ par $g_n(x)$, on a

$$(6)\qquad g_n(x) = f_n(x) - F_n(x) = (n+1-x)(v_n - V_n) + (x-n)(v_{n+1} - V_{n+1});$$

donc, d'après (1),

$$|g_n(x)| \leqq \delta(|n+1-x| + |x-n|).$$

Étudions la variation de $|n+1-x| + |x-n|$ quand x croît de $n-1$ à $n+2$,

x	$n-1$	$n-\frac{1}{2}$	n	$n+1$	$n+\frac{3}{2}$	$n+2$
$\lvert n+1-x \rvert + \lvert x-n \rvert$	3	2	1	1	2	3

;

donc

$$(7)\qquad \text{si} \quad n \leqq x \leqq n+1, \qquad |g_n(x)| \leqq \delta,$$

$$(8)\qquad \text{si} \quad n-\frac{1}{2} \leqq x \leqq n+\frac{3}{2}, \qquad |g_n(x)| \leqq 2\delta,$$

$$(9)\qquad \text{si} \quad n-1 \leqq x \leqq n+2, \qquad |g_n(x)| \leqq 3\delta.$$

Si l'on admet que, pour $n-1 < x < n+2$, $f(x) - f_n(x)$ soit négligeable, on pourra écrire

$$f(x) - F_n(x) = f_n(x) - F_n(x) = g_n(x)$$

et alors les formules (7), (8), (9) donnent une limite supérieure de l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $F_n(x)$.

Si $n < x < n+1$ et si w est une valeur approchée de $F_n(x)$ à δ près, on a

$$(10)\qquad |f(x) - w| < 2\delta = u.$$

Probleme inverse. — *b et β étant des nombres donnés ($\beta > 0$), trouver une limite inférieure et une limite supérieure des nombres x qui vérifient la relation*

$$b - \beta < f(x) < b + \beta \quad \text{ou} \quad |f(x) - b| < \beta.$$

On commence par chercher des entiers n, n', n'' tels que

$$V_n \leqq b < V_{n+1},$$

$$V_{n'} \leqq b - \beta - \delta < V_{n'+1}, \qquad V_{n''-1} < b + \beta + \delta \leqq V_{n''}.$$

On en conclut d'abord que $n' < n+1$ et $n < n''$; ensuite

$$v_{n'} \leqq V_{n'} + \delta \leqq b - \beta, \qquad b + \beta \leqq V_{n''} - \delta \leqq v_{n''}.$$

Donc $n' < x < n''$ et l'on s'en tient là si $n' < n-1$ ou $n'' > n+2$.

Si $n - 1 \leqq n'$ et $n'' \leqq n+2$, on a

$$n - 1 < x < n + 2;$$

on peut alors essayer de trouver une limite inférieure et une limite supérieure de x plus resserrées que n' et n'', en supposant toujours $f(x) - f_n(x)$ négligeable pour $n-1 < x < n+2$. Pour cela, on calcule le nombre a défini par

$$F_n(a) = b.$$

Comme $V_n \leqq b < V_{n+1}$, on a

$$n \leqq a < n+1.$$

Puis

$$f_n(x) - f_n(a) = (x-a)\,d_n;$$

or

$$f_n(a) = F_n(a) + g_n(a) = b + g_n(a);$$

donc

$$(x-a)\,d_n = f_n(x) - b - g_n(a),$$

(11) $$|x - a|\,d_n \leqq |f_n(x) - b| + |g_n(a)|.$$

Or $|g_n(a)| \leqq \delta$ d'après (7) et, puisque l'on considère

$$f(x) - f_n(x)$$

comme négligeable, les valeurs de x qui vérifient la relation

$$|f(x) - b| < \beta$$

vérifient aussi la relation $|f_n(x) - b| < \beta$ et alors (11) montre que

$$|x - a|\,d_n < \beta + \delta.$$

De plus, d'après (2), $d_n \geqq D_n - u$; donc

(12) $$|x - a| < \frac{\beta + \delta}{D_n - u}.$$

Si a' est une valeur approchée de a à α près,

(13) $$|x - a'| < \frac{\beta + \delta}{D_n - u} + \alpha.$$

Remarques. — 1° Si $D_n = u$, on s'en tient à $n' < x < n''$.

2° S'il s'agit de trouver une limite inférieure et une limite supérieure du nombre x défini par $f(x) = b$, on n'aura qu'à faire, dans ce qui précède, $\beta = 0$.

Si maintenant on veut tenir compte de $f(x) - f_n(x)$, posons

$$f(x) - f_n(x) = R_n(x) \tag{14}$$

et cherchons une limite supérieure de $|R_n(x)|$. Pour cela, posons avec M. Peano (*Formulario*, p. 290) :

$$\varphi(a, b, c) = (b - c)f(a) + (c - a)f(b) + (a - b)f(c) \quad (^1),$$
$$\varphi(t, b, c) = (b - c)f(t) + (c - t)f(b) + (t - b)f(c),$$
$$\psi(t) = (a - b)(a - c)\varphi(t, b, c) - (t - b)(t - c)\varphi(a, b, c),$$

a, b, c étant des nombres donnés quelconques et t une variable. La fonction $\psi(t)$ s'annule identiquement pour $t = a$ et aussi pour $t = b$ et pour $t = c$, car $\varphi(b, b, c) = 0$ et $\varphi(c, b, c) = 0$. Donc, d'après le théorème de Rolle (en supposant, pour fixer les idées, $a < b < c$), la dérivée $\psi'(t)$ s'annule pour deux valeurs de t comprises l'une entre a et b, l'autre entre b et c; donc la dérivée seconde $\psi''(t)$ s'annule pour une valeur t_1 de t comprise entre a et c. Or

$$\psi''(t) = (a - b)(a - c)(b - c)f''(t) - 2\varphi(a, b, c);$$

donc

$$(a - b)(a - c)(b - c)f''(t_1) - 2\varphi(a, b, c) = 0.$$

Le raisonnement et la formule précédente subsistent quel que soit l'ordre de grandeur de a, b, c, en désignant par t_1 un nombre compris entre le plus grand et le plus petit des trois nombres a, b, c. Cette formule subsiste encore quand deux de ces trois nombres sont égaux, car alors le premier membre est identi-

(1) C'est-à-dire

$$\varphi(a, b, c) = \begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f(c) & c & 1 \end{vmatrix}.$$

quement nul. En faisant dans cette formule $a = x$, $b = n+1$, $c = n$ et en remarquant que

$$\varphi(x, n+1, n) = f(x) - (x-n)f(n+1) - (n+1-x)f(n)$$
$$= f(x) - f_n(x) \text{ d'après } (3) = R_n(x),$$

on a

(15) $$R_n(x) = \frac{1}{2}(x-n)(x-n-1)f''(t_1),$$

t_1 étant compris entre le plus petit et le plus grand des trois nombres x, n, $n+1$. Supposons x, n et $n+1$ compris dans un certain intervalle (N_1, N_2) et soit m une limite supérieure des valeurs que prend $|f''(t)|$ quand t varie de N_1 à N_2 :

(16) $$|f''(t_1)| < m.$$

D'autre part, en posant $x = n + \frac{1}{2} + z$, on a

$$(x-n)(x-n-1) = \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right) = z^2 - \frac{1}{4}.$$

Étudions la variation de $z^2 - \frac{1}{4}$ quand z croît de 0 à $\frac{3}{2}$:

z	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	1	$\frac{3}{2}$
$z^2 - \frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0,24	$\frac{3}{4}$	2

Or

$$0,24 < \frac{1}{4};$$

donc, en posant

(17) $$\frac{1}{8} m = \mu,$$

(18) si $|z| \leqq \frac{7}{10}$ ou $n - \frac{1}{5} \leqq x \leqq n + \frac{6}{5}$, $|R_n(x)| < \mu$,

(19) si $|z| \leqq 1$ ou $n - \frac{1}{2} \leqq x \leqq n + \frac{3}{2}$, $|R_n(x)| < 3\mu$,

(20) si $|z| \leqq \frac{3}{2}$ ou $n - 1 \leqq x \leqq n + 2$, $|R_n(x)| < 8\mu$.

Cela posé, reprenons les deux problèmes.

Problème direct. — Si $n < x < n+1$ et qu'on remplace $f(x)$ par $F_n(x)$, l'erreur commise est

$$f(x) - F_n(x) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - F_n(x)$$

ou

$$f(x) - F_n(x) = R_n(x) + g_n(x). \tag{21}$$

Donc, d'après (18) et (7),

$$|f(x) - F_n(x)| < \mu + \delta.$$

Problème inverse. — *b et β étant des nombres donnés ($\beta > 0$), trouver une limite inférieure et une limite supérieure des nombres x qui vérifient la relation*

$$b - \beta < f(x) < b + \beta \quad \text{ou} \quad |f(x) - b| < \beta. \tag{22}$$

On détermine, comme plus haut, un nombre n tel que

$$V_n \leqq b < V_{n+1} \tag{23}$$

et un nombre a tel que

$$F_n(a) = b, \tag{24}$$

d'où $n \leqq a < n+1$. Mais (21) peut s'écrire

$$f(x) - b - g_n(x) - R_n(x) = F_n(x) - b.$$

Or

$$F_n(x) - b = F_n(x) - F_n(a) = (x - a) D_n;$$

donc

$$f(x) - b - g_n(x) - R_n(x) = (x - a) D_n, \tag{25}$$

d'où

$$|x - a| D_n \leqq |f_n(x) - b| + |g_n(x)| + |R_n(x)|. \tag{26}$$

1° Si

$$V_n < b - \beta - \delta, \qquad b + \beta + \delta < V_{n+1},$$

on a

$$v_n \leqq V_n + \delta < b - \beta, \qquad b + \beta < V_{n+1} - \delta \leqq v_{n+1};$$

donc $n < x < n+1$ et alors de (26) on tire, d'après (22), (7)

et (18),

(27) $$|x-a| < \frac{\beta+\delta+\mu}{D_n}.$$

2° Si

$$V_{n-1} < b-\beta-\delta, \qquad b+\beta+\delta < V_{n+2},$$

on a

$$v_{n-1} \leqq V_{n-1}+\delta < b-\beta, \qquad b+\beta < V_{n+2}-\delta \leqq v_{n+2};$$

donc $n-1 < x < n+2$ et alors de (26) on tire, d'après (22), (9) et (20),

(28) $$|x-a| < \frac{\beta+3\delta+8\mu}{D_n}.$$

3° Si, en appliquant (28), on trouve que $n-\frac{1}{2} < x < n+\frac{3}{2}$, on pourra tirer de (26), d'après (22), (8) et (19),

(29) $$|x-a| < \frac{\beta+2\delta+3\mu}{D_n}.$$

4° Si l'on trouve, en appliquant (28) ou (29), que

$$n-\frac{1}{5} < x < n+\frac{6}{5},$$

on pourra tirer de (26), d'après (22), (8) et (18),

(30) $$|x-a| < \frac{\beta+2\delta+\mu}{D_n}.$$

J'ajoute que l'on peut appliquer les formules (27), (28), (29), (30) sans avoir fait de constatations *préalables*. En effet, la formule (27), par exemple, peut s'écrire $x_1 < x < x_2$, en posant

$$x_1 = a - \frac{\beta+\delta+\mu}{D_n}, \qquad x_2 = a + \frac{\beta+\delta+\mu}{D_n}.$$

Je dis que, si $n < x_1 < x_2 < n+1$, cela suffit à prouver que la relation $|f(x)-b| < \beta$ entraîne $x_1 < x < x_2$. En effet, d'après (25),

$$\begin{aligned} f(x_1)-b &= (x_1-a)D_n + g_n(x_1) + R_n(x_1) \\ &= -\beta-\delta-\mu+g_n(x_1)+R_n(x_1). \end{aligned}$$

Or $n < x_1 < n+1$ par hypothèse; donc $g_n(x_1) \leqq \delta$ d'après (7)

et $R_n(x_1) < \mu$ d'après (18); par conséquent

$$f(x_1) - b < -\beta - \delta - \mu + \delta + \mu$$

ou $f(x_1) < b - \beta$. De même, $b + \beta < f(x_2)$.

Donc, si $b - \beta < f(x) < b + \beta$, on a

$$x_1 < x < x_2.$$

Calcul de $f''(x)$.

Si $f(x) = \log \text{vulg.}\, x$, on a

$$f''(x) = -\frac{M}{x^2} \qquad \text{avec} \qquad M = \log \text{vulg.}\, e = 0{,}43\ldots;$$

donc

$$|f''(x)| < 5.10^{-7} \qquad \text{pour} \qquad x > 1000.$$

Pour les tables des log tang des arcs de centigrade en centigrade,

$$f(x) = \log \text{vulg. tang} \frac{y}{2} \qquad \text{avec} \qquad y = \frac{\pi x}{10^4},$$

$$f'(x) = \frac{M\pi}{10^4} \frac{1}{\sin y}, \qquad f''(x) = -\frac{M\pi^2}{10^8} \frac{\cos y}{\sin^2 y},$$

$$\text{Si} \qquad 600 < x < 9400, \qquad |f''(x)| < 12.10^{-7};$$

$$\text{Si} \qquad 3000 < x < 7000, \qquad |f''(x)| < 4.10^{-8}.$$

On peut aussi calculer $f''(x)$ au moyen des tables elles-mêmes quand $f''(x)$ varie constamment dans le même sens dans l'intervalle considéré. En effet, posons

$$d(x) = f(x+1) - f(x).$$

On a, d'après la formule des accroissements finis,

$$d(n+p) - d(n) = p\, d'(x_1) = p[f'(x_1+1) - f'(x_1)] = pf''(x_2)$$

avec

$$n < x_1 < n + p, \quad x_1 < x_2 < x_1 + 1.$$

Donc

$$d_{n+p} - d_n = pf''(x_2), \qquad n < x_2 < n + p + 1.$$

De même,

$$d_{n-1} - d_{n-p-1} = pf''(x_3), \qquad n - p - 1 < x_3 < n.$$

Donc, si $f''(x)$ va constamment en croissant,

$$d_{n-1} - d_{n-p-1} < pf''(n) < d_{n+p} - d_n$$

ou, d'après (2),

$$D_{n-1} - D_{n-p-1} - 2u < pf''(n) < D_{n+p} - D_n + 2u.$$

Par exemple, pour les tables à cinq décimales des log tang des arcs de centigrade en centigrade,

$$D_{499} = 87u, \qquad D_{599} = 73u = D_{600}, \qquad D_{700} = 63u$$

avec $u = 10^{-5}$. Donc

$$-16.10^{-7} < f''(600) < -8.10^{-7}.$$

Le lecteur. — Quand j'ai passé le baccalauréat, on m'a demandé de faire un calcul de logarithmes, *avec toute la précision que comportent les tables* : que voulez-vous de plus ?

L'auteur. — Pour passer le baccalauréat, il suffit d'observer les règles du jeu du baccalauréat; mais, quand tu voudras faire un calcul sérieux avec des tables, tu seras bien obligé de te rendre compte du degré de précision que comportent ces tables.

Le lecteur. — Vos formules sont bien compliquées; je préfère la formule $\frac{d}{D}$, que donnent les bons auteurs.

L'auteur. — Il est difficile de trouver des règles qui soient à la fois simples, exactes et générales. On peut essayer de faire des règles particulières. Ainsi, pour $f(x) = \text{log vulg.}\,x$,

$$f(x) - f(a) = (x - a)\frac{M}{x_1},$$

x_1 étant compris entre a et x.

En posant, comme plus haut, $F_n(a) = b$, on en tire

$$\frac{x-a}{x_1} = \frac{f(x) - b + F_n(a) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)}{M}.$$

Or $\frac{1}{M} = 2,30\ldots < 2,5$ et $|F_n(a) - f_n(a)| < \delta$ d'après (7); donc, si $|f(x) - b| < \beta$ et que $f_n(a) - f(a)$ soit négligeable, on a, en désignant par x' une limite supérieure de a et de x et,

par suite, de x_1,

$$\frac{|x-a|}{x'} < 2,5(\beta+\delta).$$

En mettant x au lieu de x', 3 au lieu de 2,5, et en négligeant δ, tu pourras dire que *l'erreur relative commise sur un nombre calculé au moyen de son logarithme est moindre que le triple de l'erreur absolue commise sur ce logarithme.*

Le lecteur. — Pourquoi n'avez-vous pas parlé de la différence seconde, ni de la formule classique de Newton ?

L'Auteur. — En désignant la différence seconde $d_{n+1}-d_n$ par $d_n^{(2)}$, la formule de Newton s'écrit

$$f(x)=f(n)+(x-n)d_n+\frac{1}{2}(x-n)(x-n-1)d_n^{(2)}+\ldots.$$

Pour se servir de cette formule, il faut la limiter à un certain terme et ajouter un terme correctif. En s'arrêtant au deuxième terme et en désignant le terme correctif par $R_n(x)$, on a justement la formule (14).

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
68170 Quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
68170 Quai des Grands-Augustins, 55.


UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 114019273